De l'éther de Fresnel à la relativité restreinte.

JEAN REIGNIER

Professeur Émérite de l'Université Libre de Bruxelles (ULB)
et de la Vrije Universiteit Brussel (VUB)
Département de Mathématiques, CP 217, Campus de la Plaine ULB
Université Libre de Bruxelles, 1050 Bruxelles, Belgique
e-mail: jreignie@vub.ac.be

Résumé. Je présente une revue de l'étude des phénomènes optiques dans les corps en mouvement durant le 19e siècle. Je montre comment H.A. Lorentz, par une approche progressive, réussit à expliquer ces phénomènes et comment il aboutit ainsi à ses formules relativistes. Je souligne le rôle important de H. Poincaré en tant que critique des théories existantes. Je discute plus particulièrement sa synchronisation des horloges à distance qui clarifie la signification du "temps local" de Lorentz.

Abstract. I present a review of the study of optical phenomena in moving bodies during the 19th century. I show how Lorentz's progressive stages approach successfully explained these phenomena and how he finally got his relativistic formulae. The important role of H. Poincaré as a critic reviewer of existent theory is underlined. I discuss with some details the Poincaré's distant clocks synchronisation, which clarifies the meaning of Lorentz's local time.

Introduction.

Le contraste entre les deux citations suivantes montre bien la différence d'appréciation qui peut exister quant à la difficulté d'accomplir un changement conceptuel, selon qu'on en juge avant ou longtemps après sa réalisation.

" On a fait bien des recherches sur l'influence du mouvement de la terre. Les résultats ont toujours été négatifs. Mais si l'on a entrepris ces expériences, c'est qu'on n'en était pas sûr d'avance, et même, d'après les théories régnantes, la compensation ne serait qu'approchée, et l'on devait s'attendre à voir des méthodes précises donner des résultats positifs. (....). On a fait des expériences qui auraient dû déceler les termes du premier ordre; les résultats ont été négatifs; cela pouvait-il être le fait du hasard? Personne ne l'a admis; on a cherché une explication générale, et Lorentz l'a trouvée; il a montré que les termes du premier ordre devaient se détruire, mais il n'en était pas de même des termes du second. Alors on a fait des expériences plus précises; elles ont aussi été négatives; ce ne pouvait non plus être l'effet du hasard; il fallait une explication; on l'a trouvée; on en trouve toujours; les hypothèses, c'est le fonds qui manque le moins. Mais ce n'est pas assez; qui ne sent que c'est encore laisser au hasard un trop grand rôle? Ne serait-ce pas aussi un hasard que ce singulier concours qui ferait qu'une certaine circonstance viendrait juste à point pour détruire les termes du premier ordre, et qu'une autre circonstance, tout à fait différente, mais tout aussi opportune, se chargerait de détruire ceux du second ordre? Non, il faut trouver une même explication pour les uns et pour les autres, et alors tout nous porte à penser que cette explication vaudra aussi pour les termes d'ordre supérieur, et que la destruction mutuelle de ces termes sera rigoureuse et absolue."

Henri Poincaré, "La Science et l'Hypothèse", (1902).

'When I asked him how he had learned of the Michelson-Morley experiment, he told me that he had become aware of it through the writings of H.A. Lorentz, but *only after 1905* had it come to his attention![S.'s italics] "Otherwise", he said, "I would have mentionned it in my paper." He continued to say that experimental results which had influenced him most were the observations on stellar aberration and Fizeau's measurements on the speed of light in moving water. "They were enough," he said.'

R.S. Shankland, "Conversations with A. Einstein", (4 Feb.1950).

Mon exposé vise à suivre, pas à pas, bien qu'en résumé, le long chemin qui a conduit les physiciens du 19e siècle d'une approche de l'optique avec un éther jouant un rôle essentiel de repère absolu vers une théorie relativiste où l'éther ne joue plus de rôle cinématique.

1. De l'éther mécanique à l'éther électromagnétique[1]

Le début du 19e siècle voit le passage rapide de la théorie corpusculaire de la lumière proposée par Newton (1675) vers une théorie ondulatoire proposée par Huygens (1690). En 1801, Th. Young (1773-1829) en apporte les premières évidences probantes, notamment en montrant qu'en ajoutant de la lumière à de la lumière, on peut causer l'absence de lumière (interférences).

À l'époque, une théorie ondulatoire ne peut être qu'une théorie mécanique. En acceptant cette théorie, on admet donc aussi l'existence d'un milieu universel, présent dans les meilleurs vides (notamment dans le vide interstellaire) comme dans tous les corps pesants transparents, et dont les vibrations sont perçues par nous comme étant la lumière. Augustin Fresnel (1788-1827) sera le champion de cette idée. Dans une série impressionnante de travaux, de 1815 à sa mort, il établira une telle quantité de résultats que la théorie ondulatoire sera par la suite considérée comme définitivement prouvée. Après Fresnel, les physiciens croient pouvoir affirmer que la lumière n'est qu'un certain mode de vibration d'un fluide universel: l'éther; ce qui réduit la tâche de l'optique à étudier les propriétés physiques de ce fluide.

Cette étude devait cependant révéler des propriétés bien étranges, comme par exemple la vibration exclusivement transversale de l'éther, comme indiqué par la polarisation de la lumière. Elle soulevait aussi d'importantes questions quant aux relations entre l'éther et la matière pesante :

- l'éther du vide était-il exactement le même que l'éther des corps transparents ?
- les phénomènes dispersifs indiquaient-ils une diversification de l'éther dans les corps transparents, en fonction de la fréquence des vibrations ?
- les corps transparents en mouvement entraînaient-ils l'éther dans leur déplacement ?

C'est bien entendu cette dernière question qui sera examinée dans l'exposé d'aujourd'hui, puisqu'elle a été d'une importance capitale pour le changement conceptuel intervenu au début du 20e siècle: la naissance de la relativité restreinte.

---

(1) pour la prépartion de ce premier paragraphe, j'ai beaucoup utilisé l'ouvrage très documenté de E.T. Whittaker: "A History of Aether and Electricity", [Wh-51].

Quand, vers 1865, les progrès de l'électricité et du magnétisme furent synthétisés d'une manière magistrale par J.C. Maxwell (1813-1879), il apparut que l'on pouvait identifier l'éther de l'optique et celui de l'électromagnétisme (éther de Faraday). Certains problèmes s'en trouvèrent résolus, comme par exemple celui d'une polarisation exclusivement transversale. D'autres surgirent; comme par exemple, de décider si le vecteur de polarisation de Fresnel correspondait à la vibration électrique ou à la vibration magnétique. Les théories se diversifièrent sur la base de ces questions et le problème de l'entraînement de l'éther dans le mouvement de la matière réapparut comme l'un des éléments distinctifs entre ces théories.

Fresnel avait résolu ce problème de l'entraînement de l'éther dans le cadre de sa théorie mécanique de l'optique en proposant, dès 1822, une solution d'entraînement partiel :

- lorsqu'un corps transparent d'indice de réfraction n est animé d'une vitesse v par rapport à l'éther immobile, l'éther contenu dans ce corps est partiellement entraîné dans ce mouvement, dans la proportion:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2} \ ; \qquad (1)$$

- dès lors, les vitesses du corps matériel dans l'éther (soit v) et de la lumière dans le corps matériel quand il est au repos dans l'éther (soit c/n, c étant la vitesse de la lumière dans le vide et n étant l'indice de réfraction du corps[2]) ne s'additionnent que partiellement. Pour une propagation de la lumière parallèle à la vitesse du corps matériel, on obtient ainsi:

$$V = \frac{c}{n} \pm (1 - \frac{1}{n^2}) v \qquad (2)$$

Le raisonnement théorique de Fresnel est présenté dans l'Appendice 1 (1a). On y considère l'éther comme un véritable fluide doté de propriétés mécaniques. Par contraste, je présente aussi dans cet Appendice le

[2] Il s'agit bien entendu de la théorie ondulatoire de la lumière. La vitesse serait nc dans le cas d'une théorie corpusculaire. La question a été tranchée expérimentalement par Foucault et Fizeau en 1850: la lumière va plus vite dans l'air que dans l'eau et, par conséquent, la propagation de la lumière est de nature ondulatoire.

raisonnement de Lorentz (1886) où l'éther électromagnétique, qui a perdu ses propriétés mécaniques et est perpétuellement au repos, semble être entraîné à la Fresnel (1b). Je présente également (1c) le raisonnement purement cinématique de von Laue [La-07] où sans éther , un pseudo entraînement résulte simplement de la loi relativiste de composition des vitesses d'Einstein .

Dans la seconde moitié du XIX° siècle, le résultat de Fresnel a été vérifié d'une manière tout à fait satisfaisante par diverses expériences que nous allons maintenant passer en revue:

- Expérience de Fizeau (1851). Un faisceau monochromatique est partagé en deux par un miroir semi-transparent m et ces deux faisceaux parcourent un même chemin mais en sens opposés. Une partie de ce chemin se fait dans un courant d'eau qui est supposé entraîner partiellement son éther (Fig.1)

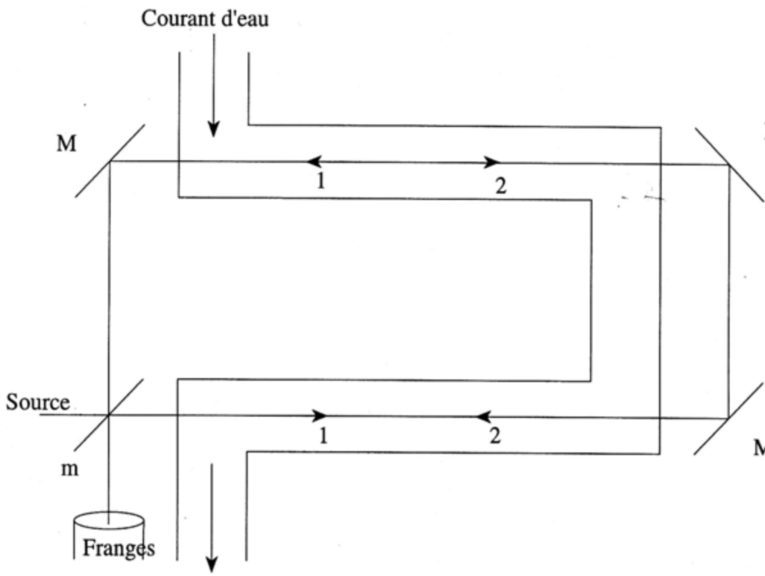

Fig. 1 : schéma de l'expérience de Fizeau;
m : miroir semi-transparent, M : miroir(s).

Les franges sont dues à la différence de phase $\Delta\varphi$ entre les deux parcours lumineux 1 et 2, correspondant à la différence des temps de parcours de ces chemins lorsque il y a entraînement de l'éther par le courant d'eau: $\Delta\varphi = 2\pi\,\nu\,\Delta t$, où ν est la fréquence de la lumière. Pour le sens du courant d'eau indiqué sur la figure, on a:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 2L\left[\frac{1}{\frac{c}{n} + \alpha\ v} - \frac{1}{\frac{c}{n} - \alpha\ v}\right] = -4\frac{L}{c}\alpha\ \ n^2\beta + O\left(\beta^2\right) \quad (3)$$

où: 2L est la longueur du parcours de la lumière dans l'eau, n est l'indice de réfraction de l'eau, v la vitesse du courant ($\beta = v/c$) et α le coefficient d'entraînement de l'éther. Pour ne conserver que le seul effet d'entraînement de l'éther par le courant, on observe le déplacement des franges lors d'une inversion du sens du courant. On <u>mesure</u> ainsi le coefficient α ; le résultat expérimental est compatible avec la valeur prédite par Fresnel.

- Expérience de Hoek (1868). Un faisceau monochromatique est partagé en deux par un miroir semi-transparent m et les deux faisceaux parcourent un même chemin mais en sens opposés. Une partie du chemin se fait dans de l'eau (ou dans du quartz)(Fig.2). L'appareillage étant entraîné par le mouvement de la Terre dans l'éther on espère mettre en évidence l'entraînement partiel de l'éther de l'eau (ou du quartz) à partir d'un déplacement des franges d'interférence lorsque tout l'appareil est tourné de 180° autour de m.

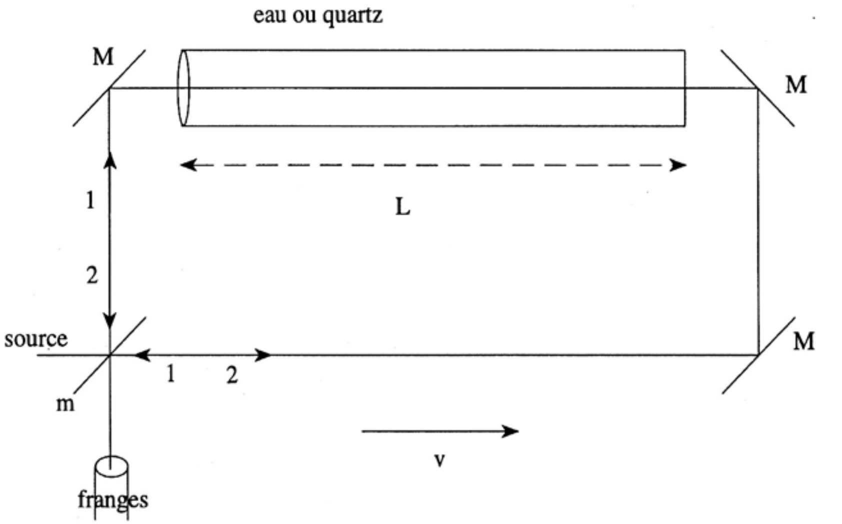

Fig. 2: schéma de l'expérience de Hoek.

L'expérience ne donne aucun déplacement des franges, et confirme ainsi la valeur du coefficient d'entraînement prédite par Fresnel! En effet:

- l'appareil étant entraîné par la Terre à la vitesse v, la lumière s'y propage à la vitesse c ± v dans la partie vide et à la vitesse (c/n) ± (α -1)v dans la partie contenant l'eau (ou le quartz);
- si l'on écarte le temps de parcours dans les parties identiques pour les deux faisceaux (sans intérêt), on a:

faisceau 1: $$t_1 = \frac{L}{\frac{c}{n} + (\alpha - 1)\ v} + \frac{L}{c + v}\ , \tag{4}$$

faisceau 2: $$t_2 = \frac{L}{\frac{c}{n} - (\alpha - 1)\ v} + \frac{L}{c - v}\ , \tag{5}$$

soit une différence de temps de parcours égale à:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2\frac{L}{c}\ n^2\beta\left[\alpha - 1 + \frac{1}{n^2}\right] + O(\beta^2)\ ; \qquad (6)$$

cette différence est effectivement nulle (au premier ordre en β) si a α la valeur proposée par Fresnel.

- Expérience d'Airy (1871). L'expérience vise à mettre en évidence l'entraînement partiel de l'éther par le mouvement de la Terre en observant une différence de l'angle d'aberration astronomique, selon qu'on l'observe avec une lunette vide ou une lunette pleine d'eau. Un mot d'explication concernant l'aberration est utile. On sait qu'il s'agit de l'angle d'ouverture d'un petit mouvement circulaire annuel apparent des étoiles dites fixes, autour d'une position moyenne. Ce mouvement apparent se comprend aisément par le diagramme suivant de composition des vitesses (Fig.3):

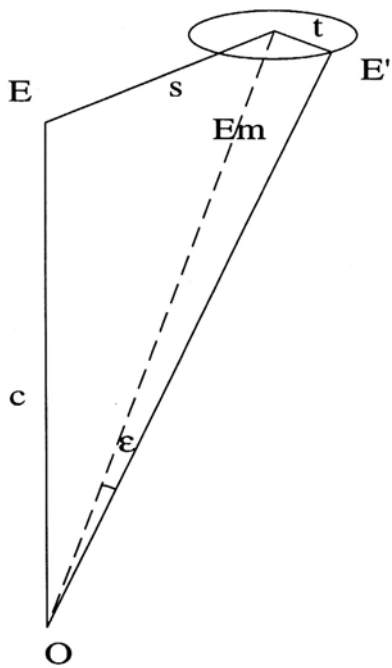

Fig. 3: diagramme de la composition des vitesses pour l'aberration.

- imaginons un observateur O qui cherche à observer l'étoile fixe E, et portons dans la direction de O vers E le vecteur OE de longueur c, la vitesse de la lumière ;
- si le Soleil est animé d'une vitesse s par rapport à cette étoile, un observateur en repos par rapport au Soleil verra l'étoile dans la direction OEm;
- comme la Terre est elle même animée d'un mouvement annuel de révolution autour du Soleil, l'image est encore déplacée à chaque instant par le vecteur t de la vitesse instantanée de la Terre par rapport au Soleil; l'observateur terrestre voit donc l'étoile dans la direction OE', qui décrit annuellement un petit cône autour de la direction "moyenne" OEm;
- l'angle d'aberration est l'angle ε d'ouverture de ce cône.

Pour estimer l'angle ε, nous admettons que les vitesses relatives des corps célestes sont très petites par rapport à la vitesse de la lumière (c'est bien entendu le cas pour la vitesse relative Terre/Soleil, t ≅30 km/s, et nous supposons qu'il en est de même de la vitesse relative Soleil/étoile, s << c). Dans ces conditions, on a: OE ≅ OEm ≅ OE' , et $\varepsilon \cong t/c \cong 10^{-4}$. Si maintenant on utilise une lunette pleine d'eau pour observer l'étoile, l'angle mesuré est évidemment l'angle après réfraction dans la lunette , à partir duquel on reconstitue l'angle d'aberration incident par la loi de Descartes (pour des angles aussi petits, i = n r); mais cet angle de réfraction correspond lui même à un coefficient d'aberration déterminé par de nouvelles vitesses: c/n au lieu de c , et (1- α) t au lieu de t, pour tenir compte de l'entraînement partiel de l'éther par l'eau de la lunette terrestre. On obtient ainsi une nouvelle valeur de l'angle d'aberration:

$$\varepsilon' = n\frac{(1-\alpha)t}{(c/n)} = n^2(1-\alpha)\ \varepsilon. \qquad (7)$$

L'expérience donne ε′ ≈ ε, ce qui montre que le coefficient d'entraînement a α une valeur très proche de celle proposée par Fresnel.

Ces expériences ont donné au coefficient d'entraînement de Fresnel (souvent appelé coefficient de Fizeau, à cause de sa première détermination expérimentale), le statut d'une vérité expérimentale dont il faut de toute manière s'accommoder. Dans la suite de l'exposé, je montrerai comment il a conditionné la longue marche vers la relativité en suivant les efforts de deux des grands participants à cet effort collectif:

- H.A. Lorentz (1853-1928), Docteur en Physique en 1875, avec une thèse sur une théorie dynamique microscopique de la réflexion et la réfraction de la lumière[3]
- J.H. Poincaré (1854-1912), Polytechnicien et Docteur en Mathématique en 1875, avec une thèse sur les équations aux dérivées partielles[4].

2. L'électrodynamique de Lorentz, de 1875 à 1904.

L'idée maîtresse de la théorie de Lorentz est que la matière n'est en définitive qu'un milieu vide (ou, plus exactement, de l'éther en repos absolu) où se meuvent des particules électrisées baptisées "ions" et plus tard "électrons", particules qui créent et qui subissent des champs électromagnétiques[5] Lorentz peut ainsi donner une explication dynamique qualitative et même souvent quantitative de la plupart des phénomènes concernant l'interaction matière lumière pour de la matière considérée "au repos" dans l'éther: émission, absorption, indice de réfraction, dispersion, diffusion de la lumière, ... etc.[6].

Le modèle de Lorentz basé sur un éther perpétuellement au repos semble devoir entrer en conflit avec l'éther partiellement entraîné de Fresnel. Aussi Lorentz cherche-t-il à justifier l'existence d'un entraînement de Fresnel "apparent" . En 1886, il réussit à justifier le coefficient de Fresnel dans le cadre de son modèle; il améliore même la formule de Fresnel en introduisant une correction de dispersion due à l'effet Doppler:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda} \; ; \qquad (8)$$

cette correction Doppler sera mise en évidence expérimentalement par

---

(3) "Over der terugkaatsing en breking van het licht", Universiteit Leiden.

(4) "Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque d'inconnues", Université de Paris.

(5) Les formules de base des théories de Maxwell et de Lorentz sont rappelées dans l'Appendice 2.

(6) Une exception remarquable est évidemment l'effet photo-électrique, qui nécessite l'introduction du quantum d'action de Planck (Einstein 1905).

Zeeman en 1911. Le raisonnement de Lorentz est présenté dans l'Appendice 1, à la suite de celui de Fresnel (1b, 1d).

Lorentz arrive ainsi à une conclusion importante: il semble que l'apparence d'un entraînement donnée par le coefficient de Fresnel, rende impossible de mettre en évidence un mouvement des corps matériels par rapport à l'éther, du moins au premier ordre en le rapport des vitesses $\beta = v/c$. Il faudrait donc se tourner vers des expériences mettant en évidence des effets d'ordre β^2. C'est précisément le cas de l'expérience de A. Michelson (1881), que nous allons maintenant considérer (Fig.4).

Un faisceau monochromatique est partagé en deux par un miroir semi-transparent m et ces deux faisceaux parcourent en aller-retour deux chemins différents de même longueur L, l'un (//) parallèle au mouvement de la terre dans l'éther, l'autre ($\perp$) perpendiculaire à ce mouvement. On espère mettre en évidence le mouvement de l'appareillage dans l'éther à partir du déplacement des franges d'interférence lorsque tout l'appareil est tourné de 90º autour de m.

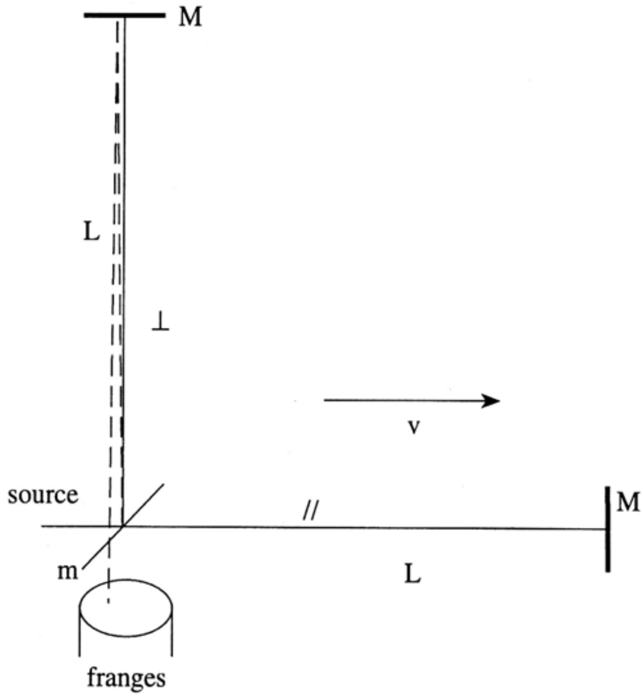

Fig.4: schéma de l'expérience de Michelson.

On a en effet des temps de parcours:

$$t_{//} = L\left[\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\right]=2\frac{L}{c}\frac{1}{1-\beta^2}\ , \tag{9}$$

$$t_{\perp} = \frac{2}{c}\sqrt{L^2+(v\ \ t_{\perp})^2}\ = 2\frac{L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \tag{10}$$

c'est-à-dire, une différence de temps de parcours:

$$\Delta t = t_{//} - t_{\perp} = 2\frac{L}{c}\left(\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{L}{c}\beta^2 + O(\beta^4). \quad (11)$$

L'expérience de Michelson de 1881 ne donne aucun déplacement des franges. Michelson en conclut que l'éther est totalement entraîné, conformément à la théorie de Stokes, et en contradiction avec la théorie de Fresnel (éther partiellement entraîné), et aussi avec la théorie alternative de Lorentz (éther non entraîné + effet dynamique donnant l'apparence d'un entraînement partiel). Lorentz ne réagit que pour signaler une petite erreur de raisonnement qui, en réduisant l'effet escompté par Michelson de moitié(7), rend l'expérience inconclusive parce que à la limite des erreurs expérimentales. Il maintient donc son point de vue d'un éther non entraîné. Mais quelques années plus tard, l'expérience étant devenue beaucoup plus précise par un allongement considérable des parcours lumineux (A. Michelson et E. Morley, 1887) et le résultat expérimental restant négatif, Lorentz doit trouver une solution. Il fait alors la proposition étonnante d'une contraction du bras longitudinal causée par le vent d'éther(8) ! En fait, le vent d'éther provoquerait une contraction dans le sens du mouvement de tous les corps matériels , ce qui rend la contraction du bras indécelable par des mesures directes (puisque tous les corps sont affectés de la même façon). La contraction du bras ne peut être mise en évidence qu'indirectement, par le résultat négatif de l'expérience optique de Michelson et Morley. La contraction ad hoc doit alors valoir :

$$\delta L = L_{\perp} - L_{//} \approx \frac{1}{2} L \ \ \beta^2. \quad (12)$$

Il s'agit là d'un exemple typique d'une interprétation d'un résultat expérimental aux seules fins de sauver une théorie.

En fait Lorentz devient conscient qu'il faut changer quelque chose à son

---

(7) Michelson n'avait pas tenu compte du déplacement de l'appareillage durant le trajet aller-retour de la lumière sur le bras perpendiculaire, ce qui donnait $t_{\perp} = 2$ L/c et donc $\Delta t = 2$ (L/c) β^2.

(8) La même proposition est faite simultanément et tout à fait indépendament par G.F. FitzGerald (1892).

électrodynamique. Dans un important article de 1895 intitulé "Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern" [Lo-95], il introduit deux concepts qui vont s'avérer essentiels pour la suite de l'histoire de la naissance de la relativité restreinte:

- le temps local: $$t' = t - \frac{v\ x}{c^2} \qquad (13)$$

pour assurer l'invariance du dalembertien (à des termes d'ordre β^2 près) après une transformation de Galilée de vitesse v selon x ;

- les états correspondants , c'est-à-dire, une transformation ad-hoc des champs électrique et magnétique de façon à assurer l'identité des phénomènes électro-optiques (toujours à des termes d'ordre β^2 près) pour les corps en mouvement dans l'éther.

Le cas échéant et si nécessaire, on complète la théorie par des corrections de contraction de Lorentz-FitzGerald. On garantit ainsi l'impossibilité de mettre en évidence le mouvement de la Terre dans l'éther jusqu'au second ordre.

Ces transformations de Lorentz primitives ainsi que les modifications introduites en 1904 sont décrites dans l'Appendice 3.

L'année 1896 voit le triomphe de l'électrodynamique microscopique de Lorentz, par son calcul de l'effet Zeeman et par la remarquable vérification expérimentale par Zeeman de détails prévus par la théorie (polarisation des raies dans différentes circonstances d'observation). Rappelons qu'il s'agit ici d'une approche d'électrodynamique "classique" basée sur la perturbation du mouvement des électrons atomiques par un champ magnétique homogène et constant. La théorie ne contient qu'un seul paramètre, le rapport e/m de la charge à la masse de l'électron(9), et les travaux expérimentaux de Zeeman mesurent en fait ce rapport (en grandeur et en signe) un an avant la détermination de J.J. Thomson (Cf. [Lo-02], [Ro-65]). Lorentz et Zeeman

(9) Ce fût une chance extraordinaire que les premières observations de Zeeman concernaient des raies à effet Zeeman "normal", pour lesquelles le quantum d'action h disparaît des calculs quantiques, ce qui permet une approche classique. Par la suite, Lorentz essaiera vainement de comprendre l'effet Zeeman "anormal" dans le cadre de son modèle. L'effet Zeeman "anormal" ne deviendra compréhensible qu'après l'introduction du spin et du moment magnétique de l'électron (Uhlenbeck et Goudsmit, 1925).

verront leur travaux récompensés par le Prix Nobel de Physique 1902.

Suite aux critiques de Poincaré et aux travaux de Larmor, Lorentz donne vers 1900 "le petit coup de pouce" nécessaire pour obtenir la covariance des phénomènes électro-optiques, termes en β^2 inclus. Enfin, en 1904, il publie "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light" [Lo-04], qui peut être considéré comme le couronnement de ses travaux sur l'électrodynamique des corps en mouvement. On y trouve notamment (voir Appendice 3):

- la transformation de Lorentz correcte;
- le théorème des états correspondants à tous les ordres en v/c;
- sa formulation de la dynamique de l'électron, où l'électron dont la masse serait d'origine purement électromagnétique est déformé par son déplacement dans l'éther (contraction de Lorentz-FitzGerald). L'inertie de l'électron de Lorentz se manifeste par deux "masses"(10) variant différemment avec la vitesse:

- masse transversale: $$m_{\perp} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \qquad (14)$$

- masse longitudinale: $$m_{//} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}} \qquad (15)$$

Ces résultats seront confirmés l'année suivante par la dynamique relativiste de l'électron fondée par H. Poincaré.

En conclusion de ce bref survol de l'œuvre de Lorentz, on peut affirmer que:

- l'électrodynamique lorentzienne est véritablement à la base de nos conceptions modernes, relativistes et quantiques. Elle est le prototype (classique) d'une approche microscopique des phénomènes d'interaction matière lumière, à laquelle succédera l'électrodynamique quantique (Cf. par exemple le livre de Heitler,

(10) Pour éviter toute confusion avec nos idées modernes (empreintes de l'esprit relativiste), rappelons que la masse est ici le coefficient de l'accélération (c-à-d. de la dérivée seconde de la position par rapport au temps) dans une équation du mouvement dont le second membre est la force de Lorentz.

[He-54]). Elle a permis d'apercevoir la nécessité de corriger les formules galiléennes de transformation, et même, après de nombreux tâtonnements, d'obtenir une véritable covariance relativiste.

- cependant, Lorentz ne peut pas être considéré comme le premier des "relativistes". Non seulement parce que sa pensée repose fermement sur une conception de l'éther comme un milieu privilégié, mais surtout, parce que sa transformation de base reste la transformation de Galilée, qu'il arrange ensuite par son théorème des états correspondants. Ce faisant, ce théorème ressortit de l'ancienne idée de "sauver les apparences". Une fois les apparences sauvées, Lorentz ne se préoccupe guère de reconsidérer le rôle de l'éther.

Cette révision du rôle de l'éther sera faite par Poincaré et par Einstein, chacun à sa manière:

- Poincaré conserve l'idée de l'existence d'un éther comme milieu actif, siège des phénomènes électromagnétiques. Mais il découvre la structure de groupe des transformations de Lorentz et il l'utilise habilement pour ramener l'éther à n'être cinématiquement qu'un référentiel particulier parmi une infinité de référentiels inertiels équivalents. On peut dire qu'il élimine ainsi l'éther "de facto", en supprimant toute possibilité d'en étudier les propriétés spécifiques par les phénomènes de l'électro-optique [Po-05], [Po-06].
- Einstein, beaucoup plus radical, élimine l'éther "de jure" en construisant une cinématique relativiste sans référence aucune à un espace absolu [Ei-05].

3. J. H. Poincaré physicien.

Henri Poincaré est sans aucun doute l'un des plus grands mathématiciens de la fin du 19^{e} siècle. Son Oeuvre Mathématique est immense et couvre tous les domaines classiques de la mathématique: arithmétique, géométrie, algèbre, analyse, équations différentielles et aux dérivées partielles, analysis situs (topologie). Il est important de souligner que Poincaré est un des maîtres fondateurs de la théorie des groupes continus (1884 -1901) et qu'il consacre entre 1899 et 1901, deux gros mémoires à l'exposé général de cette théorie. Poincaré est aussi un grand mécanicien: mécanique analytique, mécanique des milieux continus, mécanique céleste (Prix du Roi de Suède pour son approche révolutionnaire du problème des 3-corps en 1889). Tous ces outils mathématiques seront d'une grande importance dans son approche du principe de relativité.

On oublie souvent de nos jours que Poincaré est aussi un grand physicien. Il est le père fondateur de la physique mathématique qui vise à mettre au service de la physique toute la rigueur du raisonnement mathématique. Si l'on se réfère à la partie correspondante de l'analyse de ses travaux scientifiques, qu'il a rédigée en 1901, on trouve pour la période 1887-1901 (Cf. [Po-01]):

- 18 mémoires (1887-1892) portant sur les équations différentielles de la physique mathématique;
- 9 mémoires (1890-1894) portant sur les ondes hertziennes;
- 36 mémoires (1889-1901) portant sur la critique des théories physique;
- de nombreux cours (imprimés) concernant la physique mathématique, cours qui contiennent souvent une revue critique des théories en vigueur (Cf. notamment, sa "Théorie mathématique de la lumière" de 1889, et son "Électricité et Optique" de 1890 qui présente et discute <u>les</u> théories de l'électromagnétisme et de l'électro-optique, selon les "successeurs de Maxwell").

En 1895, Poincaré publie sous le titre général "À propos de la théorie de M. Larmor", une suite de quatre articles (parus entre avril et novembre 1895 dans L'Éclairage électrique), en tout 57 pages [Po-95]. Il s'agit de réflexions (et de calculs) sur <u>les</u> théories de l'électro-optique, c'est-à-dire, sur l'adaptation des théories "mécaniques" de l'optique de Fresnel, Neumann et Mac Cullagh, à une vision "maxwellienne" par Larmor, Helmholtz, Lorentz, J.-J. Thomson, et Hertz. Poincaré propose trois critères pour que ces tentatives d'adaptation puissent constituer une théorie acceptable. Elles doivent à tout le moins:

1) rendre compte du coefficient d'entraînement de Fizeau;
2) garantir la conservation de l'électricité et du magnétisme;
3) garantir la validité du principe: action = réaction.
Il constate qu'aucune des théories proposées ne satisfait simultanément aux trois critères: par exemple, la théorie de Hertz satisfait aux critères 2) et 3)

mais non au premier; la théorie de Lorentz satisfait aux critères 1) et 2) mais non au troisième; ... etc. Et Poincaré énonce ses "conclusions provisoires":

"(...). Il faut donc renoncer à développer une théorie parfaitement satisfaisante et s'en tenir provisoirement à la moins défectueuse de toutes qui paraît être celle de Lorentz. (...). Il me paraît bien difficile d'admettre que le principe de réaction soit violé, même en apparence, et qu'il ne soit plus vrai si l'on envisage seulement les actions subies par la matière pondérable et si on laisse de côté la réaction de cette matière sur l'éther. Il faudra donc un jour ou l'autre modifier nos idées en quelque point important et briser le cadre où nous cherchons à faire entrer à la fois les phénomènes optiques et les phénomènes électriques. Mais même en se bornant aux phénomènes optiques proprement dits, ce qu'on a dit jusqu'ici pour expliquer l'entraînement partiel des ondes n'est pas satisfaisant. L'expérience a révélé une foule de faits qui peuvent se résumer dans la formule suivante: il est impossible de rendre manifeste le mouvement absolu de la matière, ou mieux le mouvement relatif de la matière par rapport à l'éther; tout ce qu'on peut mettre en évidence, c'est le mouvement de la matière pondérable par rapport à la matière pondérable.(...)."

Dès lors, Poincaré va suivre de très près les travaux de Lorentz. Dans un article intitulé "La théorie de Lorentz et le principe de réaction" publié en 1900 dans un ouvrage d'hommage à l'occasion du vingt-cinquième anniversaire de la thèse de Lorentz [Po-00], il n'hésite pas à revenir sur la difficulté signalée et il propose une solution: si l'on considère l'énergie électromagnétique comme un fluide fictif doué d'inertie(11), il y a conservation de l'impulsion dans l'émission et l'absorption, du moins au premier ordre en β(12). Mais la compensation ne se fait pas simplement:

"... Pour que la compensation se fasse, il faut rapporter les phénomènes, non pas au temps vrai t, mais à un certain *temps local* t' défini de la façon suivante (...).", et Poincaré d'expliquer que le "temps local de Lorentz" (formule 13) correspond à une synchronisation des horloges à distance par

---

(11) Dans nos notations actuelles, si l'on désigne par E et H les champs électrique et magnétique de l'onde électromagnétique et par ρ la densité d'énergie maxwellienne : $\rho = (E^2+H^2)/8\pi$, alors la densité de masse inertielle proposée par Poincaré est $\mu = \rho/c^2$.

(12) Mais pas aux ordres supérieurs, "... à moins de faire une certaine hypothèse complémentaire que je ne discuterai pas pour le moment." (il s'agit des "coups de pouce" de Lorentz et notamment de la contraction de Lorentz-FitzGerald).

l'échange de signaux lumineux, dans l'illusion que la vitesse de la lumière est la même dans les deux sens, indépendamment du mouvement par rapport à l'éther. Il est, de fait, l'inventeur de l'idée de synchroniser les horloges d'observateurs distants par l'échange de signaux lumineux[13]. Poincaré ne donne pas de détails quant à l'obtention de ce résultat, mais il est facile de reconstituer son raisonnement. Je consacrerai l'Appendice 4 à cette question du temps local de Lorentz-Poincaré.

Très attentif à l'évolution des idées de Lorentz, Poincaré s'approche ainsi tout doucement d'une révision fondamentale du principe galiléen du mouvement relatif, tout en maintenant l'idée de l'existence d'un éther électro-optique. Il en parle à la Conférence de St. Louis (USA, 1904) où il énonce pour la première fois le "Principe de Relativité"[Po-04]: les lois des phénomènes physiques sont les mêmes pour un observateur fixe et pour un observateur entraîné dans un mouvement de translation uniforme (sous entendu,... par rapport à l'éther). Après la Conférence de St-Louis, il écrit à Lorentz[14] pour lui signaler que sous leur dernière forme, les transformations de Lorentz forment un groupe et que dès lors, si le second paramètre f[15] de ces transformations ne doit dépendre que du premier (c'est-à-dire de la vitesse relative des référentiels), ce second paramètre est nécessairement égal à un. Cette lettre contient explicitement, mais sans commentaires, la formule relativiste d'addition des vitesses. Il est clair que Poincaré est alors à la veille de créer une nouvelle dynamique basée sur le principe de relativité qu'il a énoncé à la Conférence de Saint-Louis.

Certains s'étonneront sans doute de ne pas trouver dans cet exposé une place de choix pour le troisième grand acteur de la création de la relativité restreinte, Albert Einstein, le seul dont l'histoire (du moins, l'histoire racontée à nos étudiants) a retenu le nom. C'est que l'exposé était consacré à la longue marche d'approche vers les idées nouvelles, et qu'Einstein, né en 1879, n'avait de toute évidence pas la possibilité d'y participer. Amené à pied d'œuvre par le gigantesque effort de ses prédécesseurs, il a aisément gravi l'ultime sommet en apportant l'idée nouvelle d'une cinématique relativiste,

---

(13) Le problème de régler des horloges à distance est déjà discuté par Poincaré en 1898, dans un article intitulé "La mesure du temps" [Po-98].

(14) Lettre découverte assez récemment par Miller (Cf. Mi-81); la date est incertaine mais se situe entre l'automne 1904 et le printemps 1905.

(15) Ce paramètre est désigné par la lettre l par Lorentz et Poincaré; j'écris f pour éviter une confusion typographique avec le chiffre 1 dans les calculs présentés dans les Appendices.

tandis que les sherpas Lorentz et Poincaré (arrivés en même temps que lui au sommet) persistaient à construire une approche essentiellement dynamique. On a souvent discuté de l'importance des rôles respectifs de Lorentz, Poincaré et Einstein dans la construction de la relativité restreinte. La plupart des auteurs s'accordent à l'attribuer à Einstein seul, avec des travaux préparatoires mais non encore relativistes de Lorentz et Poincaré (Cf. par exemple: [To-71], [Mi-81], [Pa-82]). Pour une vision alternative, avec comparaison détaillée des constructions relativistes d'Einstein et de Poincaré en 1905, on pourra consulter les références [Pi-99] et [Re-02].

4- Appendices.

Appendice1-Le coefficient d'entraînement de Fresnel-Fizeau.

1a) selon Fresnel (1822).

L'idée de base est due à Young: l'indice de réfraction reflète la "concentration" de l'éther dans la matière. Fresnel précise l'hypothèse en admettant que la densité d'éther est proportionnelle au carré de l'indice de réfraction. Si ρ_0 et ρ_1 sont les densités de l'éther, respectivement dans le vide et dans une substance transparente d'indice n, on a donc:

$$\rho_1 = \rho_0 \ n^2 . \tag{16}$$

Si le corps transparent a une vitesse v par rapport à l'éther, Fresnel considère que <u>seul l'excès d'éther est entraîné</u>, en sorte que le centre de gravité de l'éther se déplace à la vitesse:

$$w = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1} v = \frac{n^2 - 1}{n^2} v \tag{17}$$

C'est cette vitesse qu'il faut ajouter (ou soustraire) à la vitesse c/n de la lumière dans le corps transparent au repos :

$$V = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \ v . \tag{18}$$

1b) selon Lorentz (1886).

La propagation de la lumière dans un diélectrique est décrite par les équations de Maxwell (sans charge ni courant):

$$\text{div } \vec{D} = 0 \qquad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \qquad \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad (19)$$

complétées par les relations constitutives:

$$\vec{B} = \vec{H} \quad \text{(perméabilité magnétique } \mu = 1) \qquad (20)$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \text{ (constante diélectrique } \varepsilon = \mathrm{n}^2, \mathrm{n} = \text{indice de réfraction}) \qquad (21)$$

<u>Hypothèse de Lorentz</u>:

- la relation constitutive (21) est à considérer comme suit:

$$4\pi\vec{P} = (\varepsilon - 1)\vec{E} = (n^2 - 1). \text{[force qui s'exerce sur l'unité de charge]}.$$

- si le diélectrique est en mouvement, la force qui s'exerce sur l'unité de charge est (force de Lorentz):

$$\vec{E} \to \vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H}, \qquad (22)$$

et il convient de remplacer la polarisation par:

$$4\pi\vec{P} = (\varepsilon - 1)\vec{E}' = (n^2 - 1)\ (\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H}). \qquad (23)$$

Considérons un diélectrique qui se déplace par rapport à l'éther à la vitesse v selon l'axe z, et étudions une onde plane qui se propage dans ce diélectrique selon la même direction z:

$$\vec{E} = E\ \vec{1}_x \text{ exp [i(kz - }\omega\text{t)]}. \qquad (24)$$

En substituant cette solution dans les équations de Maxwell, on calcule facilement la vitesse de propagation de l'onde,

$$V = \omega / k , \tag{25}$$

et on trouve, selon les différents cas et hypothèses dynamiques:

- si n=1 (pas de polarisation du milieu) : $V = \pm c$, (26)

- si n>1 et le diélectrique au repos dans l'éther: $V = \pm c/n$, (27)

- si n>1 et le diélectrique animé d'une vitesse v par rapport à l'éther:

a) selon Maxwell : $4\pi\vec{P} = (n^2 - 1)\vec{E}$

$$\Rightarrow V = \pm\frac{c}{n} + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2})v + O(c\beta^2) \;; \tag{28}$$

b) selon Lorentz: $4\pi\vec{P} = (n^2 - 1)\ (\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \ \vec{H})$

$$\Rightarrow V = \pm\frac{c}{n} + (1 - \frac{1}{n^2})v + O(c\beta^2) \;; \tag{29}$$

On remarque que ce calcul dynamique conduit à une "apparence" d'entraînement de l'éther. Le "courant de polarisation" y joue un rôle essentiel et il faut la correction "relativiste" de la force de Lorentz pour obtenir le "bon" coefficient d'entraînement de Fizeau.

1c) selon von Laue (1907).

Le coefficient de Fresnel résulte d'une simple application de la règle relativiste einsteinienne de la composition des vitesses: celle de la lumière dans le diélectrique quand celui-ci est considéré au repos (c/n), et celle du diélectrique en mouvement (v):

$$V = \frac{\pm c/n + v}{1 \pm \frac{(c/n)v}{c^2}} = \pm\frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v + O(c\beta^2). \qquad (30)$$

L'éther a disparu; les vitesses sont celles mesurées dans le laboratoire inertiel où l'on travaille.

1d) la correction de dispersion (Lorentz 1886).

Pour Fresnel cette correction est inexistante; il faudrait imaginer qu'à chaque fréquence correspond une autre densité de l'éther.

Pour Lorentz et aussi pour von Laue, c'est une correction d'effet Doppler qu'il convient de faire lorsque l'indice de réfraction est dispersif. En effet, la fréquence perçue par l'observateur ω_0 diffère de la fréquence dans le corps en mouvement ω_1 à cause de l'effet Doppler:

$$\omega_0 = \omega_1\left(1 \pm \frac{v}{c}\right), \qquad (31)$$

(exactement pour Lorentz, à l'ordre β^2 pour von Laue). Il en résulte que l'indice utilisé dans les formules ci-dessus doit être corrigé :

$$n = n(\omega_1) = n(\omega_0) + \left(\frac{dn}{d\omega}\right)(\omega_1 - \omega_0) \ ; \qquad (32)$$

la correction est d'ordre β et ne doit donc être faite que sur le seul premier terme c/n :

$$\frac{c}{n} \to \frac{c}{n} + v\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega} = \frac{c}{n} - v\frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda}. \qquad (33)$$

C'est la correction dispersive de Lorentz, vérifiée par Zeeman en 1911.

Appendice 2- Théories de Maxwell et de Lorentz.

Maxwell: il s'agit d'une théorie à 4 champs (champ électrique E, champ magnétique H, déplacement électrique D et induction magnétique B), avec des sources d'électricité extérieures données (densité d'électricité ρ et densité de courant j). Les équations différentielles sont complétées par des équations constitutives phénoménologiques entre les champs.

- Équations de Maxwell :

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \tag{34}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{35}$$

- équations constitutives:

$$\vec{B} = \mu \ \vec{H} \quad \text{(perméabilité magnétique } \mu\text{)} \tag{35a}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad \text{(constante diélectrique } \varepsilon\text{)} \tag{35b}$$

Lorentz : il s'agit d'une électrodynamique à 2 champs microscopiques (champ électrique e, champ magnétique h) avec des particules chargées. Ces particules participent aux sources (le cas échéant, on peut ajouter des sources extérieures connues comme dans Maxwell) mais elles sont aussi dynamiquement soumises à une force F créée par les champs. Les équations constitutives sont celles du vide, c'est-à-dire, avec les unités de Lorentz: $\varepsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$.

$$\operatorname{div} \vec{e} = 4\pi \sum_{i=1}^{N} \rho_i, \qquad \operatorname{div} \vec{h} = 0, \tag{36}$$

$$\operatorname{rot} \vec{h} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\sum_{i=1}^{N} \rho_i \vec{u}_i \qquad \operatorname{rot} \vec{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = 0,$$

$$\vec{F}_i = \rho_i \left(\overrightarrow{e(i)} + \frac{\vec{u}_i}{c} \times \ \overrightarrow{h(i)} \right). \tag{37}$$

Dans la formule (37) donnant la force de Lorentz exercée sur la particule i, la notation e(i), h(i) représente les champs électrique et magnétique à l'endroit où la particule i se trouve à l'instant considéré.

Lorentz se donne comme but de retrouver les propriétés macroscopiques à partir de ces équations microscopiques.

Appendice 3 - La transformation de Lorentz et les états correspondants.

1) On passe de l'éther immobile à un autre repère en mouvement rectiligne uniforme (MRU) par une transformation de Galilée:

- coordonnées:

$$\begin{aligned} x &\to x_r = x - vt, \\ y &\to y_r = y, \\ z &\to z_r = z, \end{aligned} \tag{38}$$

$$t \to t_r = t;$$

- les vitesses s'additionnent comme chez Galilée;
- les champs se transforment scalairement, mais la dérivée partielle par rapport au temps devient la "dérivée matérielle" des milieux continus:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}. \tag{39}$$

2) On effectue un changement des variables cinématiques et un changement de l'état électromagnétique; c'est ce que Lorentz appelle "passer aux états correspondants".

<u>Changement des variables cinématiques:</u>

$$\begin{aligned} x' &= f\gamma\ x_r &&= f\gamma\ (x - vt), \\ y' &= f\ y_r &&= f\ y, \\ z' &= f\ z_r &&= f\ z, \\ t' &= f\ t_r/\gamma - f\gamma\ v\ x_r/c^2 &&= f\gamma\ (t - v\ x/c^2), \end{aligned} \tag{40}$$

avec, dans son travail de 1895 (Versuch ....):

$$f = 1 \text{ et } \gamma = 1 , \qquad (41)$$

et dans son travail final de 1904 :

$$f \text{ quelconque et } \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} . \qquad (42)$$

Le passage des variables (x,y,z,t) aux variables (x',y',z',t') est la transformation de Lorentz actuelle quand on choisit (42) avec f = 1. On remarque que, pour Lorentz, cette transformation résulte d'une démarche assez complexe: la transformation de base reste la transformation de Galilée, et on "sauve ensuite les apparences" par une transformation ad hoc qui constitue la partie cinématique du théorème des états correspondants.

Lorentz montre par un raisonnement dynamique fort complexe que, dans le cadre de sa théorie de l'électron où le paramètre f ne dépend que de la vitesse v (principe du mouvement relatif), alors ce paramètre a nécessairement la valeur 1. Poincaré lui signalera par lettre (fin 1904 ou début 1905 ?), que ce résultat résulte plus simplement de l'exigence que les transformations (40) et (42), restreintes au seul paramètre v par l'hypothèse f = f(v), continuent à former un groupe.

t' est un "temps local" dans le sens suivant: un observateur A situé en un point de coordonnée x_A dans l'éther, mais en mouvement parce que lié au système en MRU, décale son temps de la quantité indiquée, et cela quel que soit l'événement qu'il considère. Poincaré a montré dès 1900 que le temps local de Lorentz résultait tout naturellement d'un réglage des horloges dans le système en MRU, dans <u>l'illusion</u> que la lumière se propageait avec la même vitesse dans toutes les directions (voir Appendice 4).

<u>Changement de l'état électromagnétique</u> :
Pour les champs: (43)

$$E'_x = \frac{1}{f^2} E_x \qquad E'_y = \frac{\gamma}{f^2}(E_y - \beta \; H_z) \qquad E'_z = \frac{\gamma}{f^2}(E_z + \beta \; H_y)$$

$$H'_x = \frac{1}{f^2} H_x \qquad H'_y = \frac{\gamma}{f^2}(H_y + \beta \;\; E_z) \qquad H'_z = \frac{\gamma}{f^2}(H_z - \beta \;\; E_y)$$

et pour les densités de charge (ρ) et de courant (ρu): (44)

$$\rho' = \frac{1}{\gamma \;\; f^3}\rho, \qquad u'_x = \gamma^2(u_x - v), \qquad u'_y = \gamma \;\; u_y, \qquad u'_z = \gamma \;\; u_z.$$

Ces états correspondants assurent, selon Lorentz, l'identité de la description des phénomènes électromagnétiques dans les deux systèmes (au premier ordre en β dans le "Versuch ..." de 1895 et à tous les ordres en β dans le travail final de 1904). En réalité, il subsiste encore une petite erreur dans la transformation des densités de charge et de courant. Ce point sera finalement corrigé par Poincaré [Po-05, Po-06] et par Einstein [Ei-05], qui sont ainsi les premiers à écrire correctement la transformation de la dynamique de Maxwell.

Appendice 4- Le temps local selon Poincaré.

Dans son article d'hommage à Lorentz paru en 1900 [Po-00], Poincaré explique comment on réussit à sauver le principe du mouvement relatif (au premier ordre en v/c) dans le cadre de la théorie de Lorentz de 1895, grâce à certaines compensations de termes, et il écrit la phrase suivante:

" Pour que la compensation se fasse, il faut rapporter les phénomènes, non pas au temps vrai t, mais à un certain *temps local* t' défini de la façon suivante. Je suppose que des observateurs placés en différents points, règlent leurs montres à l'aide de signaux lumineux; qu'ils cherchent à corriger ces signaux du temps de la transmission, mais qu'ignorant le mouvement de translation dont ils sont animés et croyant par conséquent que les signaux se transmettent également vite dans les deux sens, ils se bornent à croiser les observations en envoyant un signal de A en B, puis un autre de B en A. Le temps local t' est le temps marqué par les montres ainsi réglées.

Si alors $V = 1/\sqrt{K_0}$ est la vitesse de la lumière, et v la translation de la terre que je suppose parallèle à l'axe des x positifs, on aura:

$$t' = t - vx/V^2 \text{ . "}$$

En 1904, à la Conférence de St-Louis, il reprend essentiellement la même formulation [Po-04], à la différence près que le principe du mouvement relatif étant alors sauvé à tous les ordre en v/c par le tout récent travail de Lorentz [Lo-04] qui introduit de manière ad-hoc la contraction de Lorentz-FitzGerald dans ses transformations, Poincaré présente cette contraction comme une hypothèse supplémentaire(16). Le temps local de Lorentz est alors (Cf. formules 40 et 42):

$$t' = f\gamma(t - vx/c^2), \text{ f quelconque et } \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}. \qquad (45)$$

Dans son article de 1904 [Lo-04], Lorentz établit (assez péniblement) que, dans le cadre de sa théorie de l'électron, le facteur d'échelle f qui doit être considéré comme dépendant de v (principe du mouvement relatif) se réduit à l'unité.

Poincaré n'a pas laissé de calcul indiquant comment il est arrivé à son interprétation du temps local de Lorentz. Le premier qui ait montré explicitement par le calcul le lien entre les temps utilisés par des observateurs en mouvement relatif est Einstein [Ei-05]. Il a ainsi explicité la méthode de réglage des horloges par échange de signaux lumineux. Dans sa présentation du temps local, Poincaré insiste sur la nécessité de croiser des signaux, ce qu'Einstein fait en utilisant le renvoi instantané vers A (par réflexion) du signal reçu par B. C'est effectivement la méthode la plus simple pour croiser des signaux parce que l'on maîtrise alors facilement les instants d'envoi et de réception, aussi bien dans le référentiel en mouvement que dans l'éther. Je l'ai utilisée dans une étude sur la question de la "troisième hypothèse de Poincaré" (Cf. réf. Re-00). Mais on peut tout aussi bien croiser les signaux sans réflexion immédiate. Voyons donc comment Poincaré a dû raisonner.

En 1900, Poincaré rencontre chez Lorentz les formules suivantes, qui relient un référentiel au repos dans l'éther où l'on utilise le "temps vrai" de la mécanique (référentiel x, t), à un autre référentiel en mouvement uniforme de vitesse v par rapport au premier où l'on utilise le temps local (référentiel

---

(16) Certains ont critiqué sévèrement cette "troisième hypothèse" de Poincaré, sans tenir compte ni du moment où elle a été formulée pour la première fois, ni des simplifications qu'il est parfois bon de faire dans des exposés s'adressant à un public non spécialisé dans ces questions (Cf. par exemple [Pa-82]). Je crois avoir fait justice de ces critiques dans mon article [Re-00]. Voir aussi la suite de cet Appendice.

x', t')[17]

$$x' = x - v\,t, \qquad (46\ a)$$

$$t' = t - v\,x/c^2. \qquad (46\ b)$$

La formule 46a est clairement la formule galiléenne de translation uniforme, avec les conventions de coïncidence des origines des systèmes de coordonnées au temps zéro et de l'emploi des mêmes unités dans les deux référentiels. La formule 46b définit le temps local de Lorentz, c'est-à-dire le temps t'(x') que doit utiliser un observateur dont la coordonnée est x' dans le référentiel en mouvement, pour que les phénomènes électro-optiques lui apparaissent comme s'il était au repos dans l'éther, du moins au premier ordre en v/c. Ici aussi, on fait des conventions de coïncidence des origines et de même marche des horloges.

En 1904, Lorentz introduit dans ses formules un facteur ad-hoc (Cf. formules 40 et 42) dans le but d'obtenir cette fois l'invariance des phénomènes électro-optiques à tous les ordres en v/c. Dans la formule galiléenne 47a, il est clair que ce facteur correspond à un changement d'échelle des longueurs dans le référentiel en mouvement: si une barre rigide de longueur L dans le référentiel en mouvement apparaît contractée (ou dilatée) par un facteur g dans le référentiel au repos, c'est à dire si sa mesure y est gL, on doit effectivement écrire la transformation galiléenne sous la forme:

$$x' = g^{-1}(x - vt). \qquad (47\ a)$$

Il faut maintenant comprendre comment le processus de synchronisation des horloges par signaux optiques croisés va conduire Poincaré au temps local (46b) en 1900 et au temps local (47b) avec le même facteur g^{-1} en 1904:

$$t' = g^{-1}(t - v\,x/c^2). \qquad (47\ b)$$

---

(17) Les deux autres coordonnées d'espace y et z sont ici omises pour la simplicité de la discussion. Je reviendrai sur ces coordonnées plus loin.

Les formules 46 et 47 définissent des changements de coordonnées $(x,t) \to (x',t')$ linéaires (correspondants à l'homogénéité de l'espace et du temps dans les deux référentiels), et homogènes (grâce aux conventions d'origines). Il est loisible de considérer les formules 46 comme un cas particulier de 47 quand les longueurs ne sont pas modifiées par le mouvement par rapport à l'éther (g = 1). Nous devons donc montrer comment la synchronisation par échange croisé de signaux optiques détermine les coefficients a et b de la forme linéaire:

$$t' = a\,t + bx, \qquad (48)$$

et aboutit à la réponse 47b. Rappelons que la règle du jeu de synchronisation définie par Poincaré peut se traduire ainsi:

- les observateurs A et B sont liés au référentiel en mouvement dont ils ignorent la vitesse dans l'éther. A peut être placé à l'origine du système de coordonnées et B en le point de coordonnée $x'_B = L$; la distance AB est égale à L dans le référentiel en mouvement, et est égale à gL dans le référentiel de l'éther.

- quand la montre de A indique le temps $t'_A = 0$, A envoie un signal optique vers B, et il demande à B d'ajuster à la réception du signal sa montre sur le temps $t'_B = L/c$; (n'ayant aucune idée de son mouvement par rapport à l'éther, A croit de bonne foi que la vitesse de la lumière dans son référentiel est c);

- mais par précaution, les deux observateurs vont effectuer un contrôle par l'opération inverse: quand la montre de B indique le temps $t'_B = t'_0$, B envoie un signal optique vers A, et il invite A à <u>vérifier</u> que sa montre indique bien le temps $t'_A = t'_0 + L/c$ à la réception du signal. Les montres sont alors synchrones, comme si le référentiel inertiel était au repos dans l'éther.

Nous allons voir que ces deux opérations définissent deux équations qui permettent de calculer les coefficients a et b de la transformation 48. On réalise ainsi le passage d'une chronologie synchronisée a priori dans l'éther (le temps vrai t) à une chronologie synchronisée dans le référentiel en mouvement par rapport à l'éther, dans l'illusion que ce système est au repos puisque la vitesse de la lumière y est la même dans les deux directions.

Le signal de A atteint B après un parcours dont la longueur D_1, estimée dans le référentiel de l'éther, est égale à la distance AB (c'est-à-dire, gL) augmentée du déplacement du référentiel mobile vt_1, où t_1 est le temps mis par la lumière pour effectuer ce parcours:

$$D_1 = gL + vt_1 = ct_1. \tag{49}$$

Nous obtenons ainsi l'instant t_1 :

$$t_1 = \frac{gL}{c - v}, \tag{50}$$

et la coordonnée $x_B(t_1)$ de B quand il reçoit le signal de A (en fait, $x_B(t_1) = D_1$):

$$x_B(t_1) = gL\,\frac{c}{c - v}. \tag{51}$$

La montre de B marque alors le temps $t'_1 = L/c$. En remplaçant ces données dans l'équation 48, on obtient une première relation en vue de déterminer les coefficients a et b:

$$\frac{L}{c} = (a + b\ \ c)\frac{gL}{c - v}. \tag{52}$$

Pour le signal croisé, nous devons procéder de même. Au temps local t'_0 de B correspond le temps vrai t_0 de l'éther donné par (48):

$$t'_0 = a\ \ t_0 + b(gL + v\ \ t_0). \tag{53}$$

La lumière va maintenant à contre sens du mouvement du référentiel mobile et la durée du trajet en temps vrai est (voir éq. 50):

$$t_2 - t_0 = \frac{gL}{c + v}. \tag{54}$$

Au temps vrai t_2 de l'arrivée du signal en A, celui-ci a la coordonnée vt_2 dans le référentiel de l'éther et sa montre doit marquer le temps local $t'_0 + L/c$. On a donc une deuxième équation:

$$t'_0 + \frac{L}{c} = a\ \ t_2 + b\ \ v\ \ t_2, \tag{55}$$

qui devient par remplacement d'après (53) et (54):

$$\frac{L}{c} = (a - b\ \ c)\frac{gL}{c+v}\,. \tag{56}$$

Les équations 52 et 56 déterminent les coefficients a et b du temps local de synchronisation dans le référentiel mobile:

$$t' = \frac{1}{g}(t - vx/\ c^2). \tag{57}$$

Les équations 46, 47 et 57 montrent que Poincaré avait raison quand, en 1900 et sans l'hypothèse de contraction (c à d. avec g = 1), il associait le temps local (46b) et la transformation d'espace de Galilée (46a). Et il avait encore raison quand, en 1904 et avec l'hypothèse de contraction, il introduisait le même facteur $g^{-1} = \gamma = (1- v^2/c^2)^{-1/2}$ dans le temps local 47b et dans la transformation d'espace de Lorentz 47a. Mais cette démonstration montre aussi que, à ce stade, le paramètre de contraction g est arbitraire. Il faut donc introduire un élément nouveau pour lever cette ambiguïté.

On sait que l'ambiguïté peut être levée quand on considère aussi la transformation des coordonnées y et z, perpendiculaires au mouvement. C'est ainsi qu'Einstein [Ei-05] montre que ces coordonnées se transforment par un facteur f(v)[18] et que ce que nous notons g est égal à $\phi(v)(1-\beta^2)^{-1/2}$. Usant alors du principe relativiste qui permet d'intervertir les rôles des deux référentiels, Einstein démontre que $\phi(v)\ \phi(-v) = 1$. Il procède alors à une synchronisation par signaux optiques avec renvoi immédiat pour deux observateurs A et B situés respectivement à l'origine et en un point de

(18) En fait, c'est le facteur f de Lorentz (éq. 42); dans l'approche einsteinienne, il ne peut dépendre que de v en vertu du principe du mouvement relatif .

coordonnée y' = L sur l'axe en mouvement y'. Il apparaît alors, par symétrie, que $\phi(v)$ est nécessairement une fonction paire de v. Dès lors, $\phi(v) = 1$. Clairement, la considération des deux autres coordonnées et le principe relativiste qui permet d'intervertir le rôle des deux référentiels (il n'y a pas d'éther chez Einstein 1905 !) démontre que le facteur de contraction de Lorentz g ne peut être que $(1-\beta^2)^{1/2}$.

L'ambiguïté est également levée par Poincaré [Po-05] en remarquant que les transformations de Lorentz (éqs. 40 et 42) forment un groupe(19), dont les transformations simples (selon x et t seulement) d'une part, et les rotations d'espace d'autre part, sont des sous-groupes (sous-groupe des boosts, et sous-groupe des rotations). En utilisant habilement ces sous-groupes, Poincaré démontre que le facteur f de Lorentz, quand on le contraint à ne dépendre que de la vitesse relative v (principe du mouvement relatif!), est une fonction paire de v, et en définitive qu'il a nécessairement la valeur 1.

Il est possible d'arriver très près de cette conclusion par la seule considération des transformations selon x et t. Si l'on impose que ces transformations forment un groupe(20) (groupe des boosts), et que le facteur de contraction g ne dépend que de la vitesse relative des référentiels, on obtient une restriction importante quant à la forme explicite de g. Montrons que si le référentiel (x' , t') est lié au référentiel de l'éther par une transformation de vitesse v_1, et si de même le référentiel (x" , t") est lui aussi lié au référentiel de l'éther par une transformation de vitesse v_2 , alors les deux référentiels mobiles sont liés entre eux par une transformation de vitesse v_3 . Le calcul n'est qu'une simple substitution dans les formules; il donne effectivement:

$$x''(t',x') = g_3^{-1}(x' - v_3 t'), \qquad (53a)$$

$$t''(t',x') = g_3^{-1}(t' - v_3 x'/c^2), \qquad (58b)$$

avec:

---

(19) Aujourd'hui désigné par $L^{\uparrow}_{+}$.

(20) Ce qui revient à nier tout rôle cinématique privilégié à l'éther. Tout observateur lié à un référentiel inertiel peut alors à bon droit se croire au repos dans l'éther.

- la règle bien connue de composition relativiste des vitesses:

$$v_3 = \frac{v_1 - v_2}{1-(v_1 v_2)/c^2}; \tag{59}$$

- une loi de composition du paramètre g :

$$g_3 = \frac{g_2}{g_1}\,\frac{1-(v_1/c)^2}{1-(v_1 v_2)/c^2}, \tag{60}$$

qui devrait conduire à en fixer la valeur en fonction de la vitesse.

Ainsi, pour satisfaire au principe relativiste "à la Poincaré" (.. chacun peut, à bon droit, se croire au repos dans l'éther..), le coefficient de contraction g doit satisfaire à l'équation à deux variables indépendantes x et y :

$$g\left(\frac{y-x}{1-x\;\;y/c^2}\right) = \frac{g(y)}{g(x)}\,\frac{1-(x/c)^2}{1-x\;\;y/c^2}. \tag{61}$$

Pour y = x , on trouve bien entendu g(0) = 1; prenant ensuite y = x + ε , où ε est infiniment petit, et développant l'équation 61 au premier ordre en ε, on obtient l'équation différentielle:

$$g'(x) = g(x)\,\frac{g'(0) - x/c^2}{1-(x/c)^2}, \tag{62}$$

qui contient le paramètre arbitraire g'(0) . La solution correspondant à la condition initiale g(0) = 1 est :

$$g(x) = \sqrt{1-(x/c)^2}\left[\frac{1+x/c}{1-x/c}\right]^{cg'(0)/2}. \tag{63}$$

On voit que l'exigence que les transformations (x, t) forment un groupe (groupe des "boosts") ne suffit pas à déterminer complètement la facteur de contraction g (v). Il faut encore un "petit coup de pouce" supplémentaire, même si ce coup de pouce se réduit à un postulat très affaibli: soit que g(v) est une fonction paire de v (comme dans la lettre de Poincaré à Lorentz; note de bas de page 14), soit même (plus faiblement encore) que le paramètre g'(0) est nul. Dans la démarche de Poincaré avant son grand article de 1905, le facteur de contraction de Lorentz représente donc un postulat indépendant.

Bibliographie.

[Ei-05] A. Einstein, "*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*" , Annalen der Physik **17** (1905) 891-921.

[He-54] W. Heitler, "*Quantum theory of radiation*", Oxford, 3rd edition, (1954).

[La-07] M. von Laue, "Die Mitführung des Lichtes durch bewegter Körper nach dem Relativitätsprinzip", Annalen der Physik, 23 (1907) 989-990.

[Lo-95] H.A. Lorentz, "Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern", Leiden: E.J. Brill (1895).Reprint in Collected Papers **5** , 1-137.

[Lo-02] H.A. Lorentz, "The theory of electrons and the propagation of light", Nobel Lecture, Dec. 1902. Reprint in "Nobel Lectures: Physics", Elsevier (1967).

[Lo-04] H.A. Lorentz, "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light", Proc. R. Acad. Amsterdam **6** (1904) 809; Reprint in Collected Papers **5** , 172-197.

[Lo-09] H.A. Lorentz, "The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat", Teubner, Leipzig (1909); reprint by Dover (1952).

[Mi-81] A.I. Miller, "Albert Einstein's special theory of relativity. Emergence (1905) and early interpretation(1905-1911)" , Addison-Wesley Pub. Cy., New-York, (1981).

[Pa-82] A. Pais, "Subtle is the Lord... The science and life of Albert Einstein ", Oxford Univ. Press, (1982).

[Pi-99] Y. Pierseaux, "La " structure fine " de la théorie de la relativité restreinte", Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles, (1998); L'Harmattan, Paris, (1999).

[Po-95] H. Poincaré, "À propos de la théorie de M. Larmor", L'éclairage électrique (1895). Repris dans "Oeuvre" Tome IX, 369-426.

[Po-98] H. Poincaré, "La mesure du temps", Rev. de Métaphysique et de Morale **6** (1898) 1.

[Po-00] H. Poincaré, "La théorie de Lorentz et le principe de réaction", Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, 2ième série, **5** (1900) 252-278. Repris dans "Oeuvre" Tome IX, 464-488.

[Po-01] H. Poincaré, "Analyse de ses travaux scientifiques (1901)", Acta Mathematica, **38** (1921) 116-125. Repris dans "Oeuvre" Tome IX, 1-14 .

[Po-02] . Poincaré, "La Science et l'Hypothèse", Flammarion (1902).

[Po-04] H. Poincaré, "Les principes de la physique-mathématique", Conférence de

St-Louis (1904). Reprint in "Physics for a New Century", Am. Inst. of Phys. 281-299.

[Po-05] H. Poincaré, "Sur la dynamique de l'électron", Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. **14** (1905)1504-1508. Repris dans "Oeuvre" Tome IX, 489-493.

[Po-06] H. Poincaré, "Sur la dynamique de l'électron", Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **21** (1906) 129-176. Repris dans "Oeuvre" Tome IX, 494-586.

[Re-00] J. Reignier, "À propos de la naissance de la relativité restreinte. Une suggestion concernant la troisième hypothèse de H.Poincaré", Bull. Acad. Roy. Belgique, Cl des Sc. 6º série , Tome XI, (2000) 63-77.

[Re-02] J. Reignier, " The birth of special relativity. An alternative account", Communication and Cognition, (2002), à paraître.

[Ro-65] L. Rosenfeld, "Theory of electrons" , Dover Publ. NY(1965).

[Sh-63] R.S. Shankland, "Conversations with A. Einstein", Am. J. Phys. **31** (1963) 47-57.

[To-71] M.A. Tonnelat, "Histoire du principe de relativité", Flammarion, Paris, (1971).

[Wh-51] E.T. Whittaker, "A History of Aether and Electricity », (2 Vol. 1951/1953), reprint by The American Institute of Physics (1987).